

物体が速さに比例した大きさの抵抗力を受けるときの物体の速度の式

物体が速さに比例した抵抗力を受ける場合、速さは時間とともに指数関数的に減少する。
このことから、物体の速度を表す式を求めてみよう。

物体の質量 m 、物体の初速度 v_0 、抵抗の比例定数 $C(> 0)$ とすると、
物体はその速度と逆向きに抵抗を受けるから、
物体の速度が v のとき物体が受ける抵抗力は $-Cv$ である。
よって、物体の運動方程式は、

$$ma = -Cv$$

$$\text{これと } a = \frac{dv}{dt} \text{ より, } m \frac{dv}{dt} = -Cv$$

$$\therefore \frac{dv}{v} = -\frac{C}{m} dt$$

$$\therefore \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{C}{m} dt$$

積分定数を k とし、自然対数をとると、

$$\log v = -\frac{C}{m}t + k$$

$$\therefore v = e^{-\frac{C}{m}t+k} = e^k e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$t=0 \text{ のとき, } v=v_0 \text{ だから, } v_0 = e^k$$

$$\text{よって, } v = v_0 e^{-\frac{C}{m}t}$$

